LA GESTIÓN DE LA CLASE DE GEOMETRÍA
Un encuentro entre saberes

Concepción F. Abraira[1]
José Villella[2]

Resumen

Durante el desarrollo de una clase de matemáticas, en especial en aquellas en que la geometría es el tema principal, los alumnos se muestran interesados en ciertos tópicos. Cuando esto ocurre, los docentes toman decisiones relativas a cómo enseñar dichos temas. Estas decisiones se incrementan a lo largo de las distintas clases y necesitan soluciones que deben diseñarse en el aula donde esta escena toma su acción. Frente a esta descripción, los libros, los ordenadores personales, los materiales manipulativos, etc., se presentan como recursos didácticos que sugieren a los docentes diferentes formas de gestionar su clase y los transforma en profesionales de la enseñanza de la geometría.

Abstract

During the development of a Mathematics´lesson, specially in those which geometry is the main topic, pupils bring interest in some subjects. When this situation happens, teachers take decisions about how to explain some contents. These decisions grow up during the class and need solutions, which have been generated at the same place. When this appears, the textbooks, the PC, the manipulative materials... show as an instructional resources, which suggest to the teacher different ways of class engineering. What pupils learn about geometry is conditioned by the contents of the lesson which appear in the classroom because itself brings us the most important geometrical acknowledgement to be studied during the school class. Due to this, we think that it is important to consider teachers as professionals.

[1] Universidad de León. España.
[2] Universidad Nacional de General San Martín-Fundación Cultural Glaux. Buenos Aires. Argentina.

"[...] los problemas prácticos sólo tienen resolución en la práctica y los planteamientos teóricos nos ayudan a comprender las situaciones prácticas, pero en ningún caso indican cómo resolverlas; la relación y conjunción entre una y otra es mucho más indirecta y difusa [...] y no se reduce a la tecnificación de la acción o a la tecnologización de la explicación teórica. Pero a su vez, no es lo mismo abordar los retos de la práctica ateóricamente, con la inercia de la experiencia no reflexiva, que abordarlos con conocimiento teórico elaborado, elaboración que precisa a su vez el conocimiento de la práctica." (Angulo Rasco y otros., 1999, 7-8).

I. La profesión de enseñar

El profesor que enseña geometría debe tener presente que los estudiantes presentan ciertas capacidades relacionadas con los contenidos geométricos y que, por lo tanto, el fin de su enseñanza es desarrollar en ellos ciertas habilidades (capacidades trabajadas socialmente) que les permitan (NCTM, 2000):

- Analizar características y propiedades de las figuras geométricas en tres, dos y una dimensión y argumentos que les permitan relacionarlas.
- Usar sistemas de representación para lograr la localización espacial.
- Aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas.
- Usar la visualización y el razonamiento espacial para la construcción de modelos geométricos con los cuales explicar fenómenos reales y situaciones matemáticas particulares.

Respecto de la formación inicial del profesor de matemáticas, y en especial en los tópicos que se refieren a la geometría, no se sigue un único enfoque para determinar qué y cómo aquel debe aprender. Del análisis de algunas fuentes bibliográficas al respecto (Aichele y Coxford, 1994; Azcárate, 1995 y 1996; Brown y Borko, 1992; Brown, Cooney y Jones, 1990; Estebaranz García, 1999; Martín, 1994; Martín Molero, 1999; Pérez Gómez, 1992; Porlán, 1993; Shulman, 1986) se encuentra que las tendencias formativas más representativas se desarrollan desde tres grandes enfoques:

1**. El enfoque tradicional**, en el que la capacitación profesional aparece íntimamente ligada a la adquisición del dominio de la disciplina: el buen profesor será aquel que tenga unas adecuadas aptitudes personales (consideradas por lo general como innatas) y que dispone de un alto dominio académico del contenido geométrico que va a enseñar.

La formación inicial se carga fuertemente de programas relativos a los contenidos de la geometría sin desarrollar demasiado los relacionados con la didáctica de los mismos para el nivel de los alumnos a los que va a atender. Este enfoque parte de una perspectiva epistemológica reduccionista en la que no se considera la distinta naturaleza del conocimiento disciplinar y del conocimiento profesional, y desde la cual el saber de importancia para la enseñanza es el matemático en su acepción científica pura.

2. **El enfoque tecnológico** o de **racionalidad técnica**, en el que el objetivo es el entrenamiento del futuro profesor en el dominio de destrezas didácticas relacionadas con la geometría como elemento de base de su competencia profesional: los profesores no son usuarios directos de los saberes disciplinares sino que deben estar en relación con las implicaciones técnicas propias de su profesión; son utilizados por el profesor en función de su trabajo. El profesor se concibe como un técnico que aplica los instrumentos aprendidos para gestionar con eficacia el proceso de enseñanza en pro de un adecuado proceso de aprendizaje en la clase de matemáticas. El conocimiento profesional así elaborado en las aulas de formación se basa en los mismos supuestos epistemológicos de las matemáticas, y se aplican a su didáctica sin considerar que ésta tiene otros referentes y variables que analizar.

3. **El enfoque de progresión continua** basado en la idea de que la capacitación profesional se inicia en la formación inicial y en el que la interacción entre la práctica y la teoría y el análisis de todos los referentes en los que se ejercerá la profesión se constituyen en aliados ineludibles del proceso de formación. Este enfoque surgido en la década de los años ochenta integra una perspectiva crítica del desarrollo profesional, con una concepción integradora y compleja del saber profesional y una perspectiva constructivista de la organización y elaboración de este saber. Toma en cuenta *los estudios sobre el pensamiento del profesor* y cómo sus concepciones influyen en la comprensión del proceso de enseñanza que diseña, *el papel de la reflexión en la acción*, convirtiéndolo en investigador de su propia actuación en el aula y *el papel del contexto* en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Según este enfoque se trata de formar un profesor tal que al enseñar geometría, sea (Porlán, 1993; Villella, 2001a):

- Facilitador del aprendizaje significativo de los alumnos generando de esa forma conocimiento escolar sobre la geometría.
- Investigador de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan en su aula, generando de esa forma conocimiento profesional sobre la práctica de la enseñanza.
- Diseñador de procesos de intervención y experimentación curricular.
- Generador de conocimiento didáctico referido a la geometría al investigar sobre los procesos de desarrollo de su currículo.

Así es como el profesor debe ir dejando su rol de implementador de los currícula desarrollados por los expertos para transformarse en un profesional que tiene que tomar decisiones. Esto se logra cuando asume que la enseñanza es un campo complejo y mal estructurado en el que las teorías desarrolladas no sirven para dar respuesta inmediata a las situaciones que surgen en el aula (Even y Markovitz, 1997).

En los párrafos anteriores hicimos alusión al término *conocimiento profesional* (fig. 1). Para definirlo es necesario tomar en consideración que el mismo se basa en la acción, en la práctica en el aula (Porlán, 1993). Desde esta concepción, *la práctica es considerada intervención en lo cotidiano*, pero dado que es **intencional** en tanto busca resultados determinados y se desarrolla **como práctica social institucionalizada** en el marco de estructuras y dinámicas de poder, requiere de conocimientos que puedan traducirse en pautas cotidianas de intervención y al mismo tiempo que permitan una reelaboración y adaptación de las mismas a partir de la reflexión que sobre ellas puede hacerse con el aporte de las distintas disciplinas científicas que se ocupan del tema.

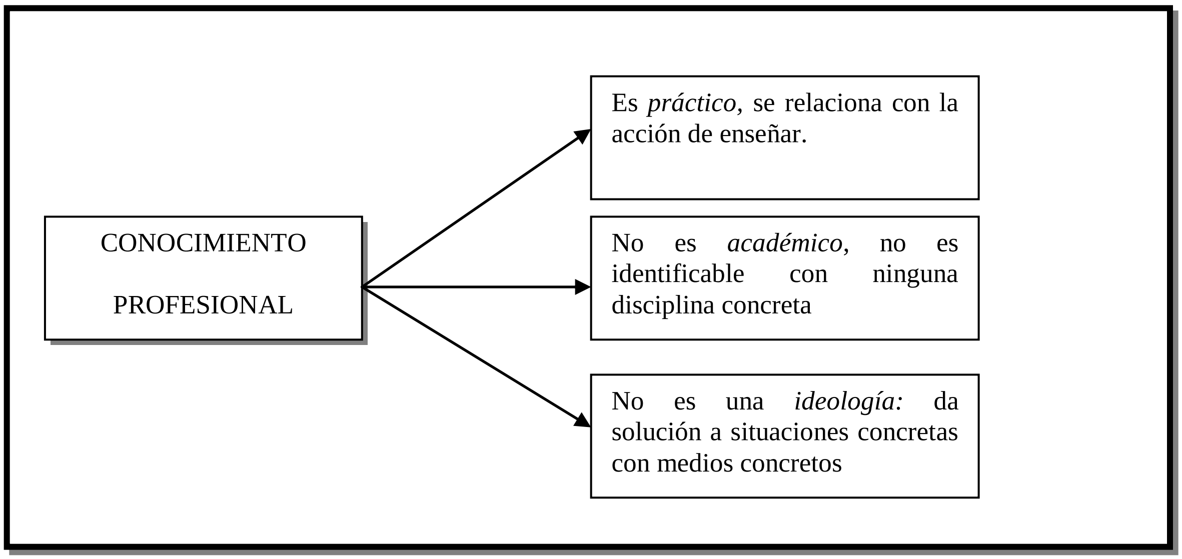


Fig. 1: El conocimiento profesional

Así, puede afirmarse que el conocimiento profesional que se desea que el futuro profesor adquiera admite como fuentes los conocimientos académicos, las experiencias cotidianas, las creencias e ideologías y las interacciones entre las tres categorías anteriores.

El profesor debe responder rápidamente ofreciendo soluciones concretas a situaciones particulares percibiendo la situación, interpretándola, reaccionando frente a ella; poniendo en práctica lo que se puede llamar una **gestalt** que comporta la formación de una actitud docente reflexiva frente a su práctica (Korthagen y Kessels, 1999):

"Muchas de las dificultades que tenemos para construir un conocimiento profesional de las materias escolares provienen de los estereotipos sociales que existen acerca del conocimiento y más concretamente del tipo de formación disciplinar recibida [... por ello es necesario llegar *...] a obtener un conocimiento profesionalizado sobre las materias escolares, que capacite a los profesores para reconsiderar sus propias concepciones epistemológicas, disciplinares y didácticas y les permita elaborar una propuesta curricular fundamentada a partir de la integración didáctica de conocimientos que provienen de fuentes diversas (la propia disciplina, el conocimiento metadisciplinar, el de los alumnos [...]."* (Martín del Pozo, 1999, 50).

Para Shulman (1986) el conocimiento profesional viene dado por la adquisición de:

1. **Conocimiento personal sobre el tema que se enseña** o dominio del contenido disciplinar. Ese conocimiento debe ser sustantivo y sintáctico. El **aspecto sustantivo** del conocimiento de la disciplina se refiere al conocimiento de los temas, principios, contenidos más importantes y los modelos de explicación de los mismos. El **aspecto sintáctico** se refiere al conocimiento de reglas y formas o métodos de refutación de los contenidos y a la relación que se da entre los mismos. Anderson (1989) usa los conceptos "alta y baja capacidad de comprensión" cuando se refiere a estas capacidades respecto de los docentes. Afirma:

"[...] la alta comprensión es necesaria para sobrellevar los esfuerzos de análisis de los contenidos o el que se refiere a la producción de los propios trabajos [...] con una baja capacidad de comprensión se pueden dominar los esquemas y los conocimientos considerados básicos para desempeñarse socialmente." (Anderson, en Brown y Borko, 1992, 220).

Conocimientos pedagógicos o dominio metodológico del docente, también considerado dominio didáctico, que le permite hacer entendible el contenido a enseñar a los alumnos. Se corresponde con el dominio de los procesos inherentes a una adecuada transposición didáctica (Chevallard y cols., 1997), que coloca al profesor en un lugar distintivo respecto de otros colectivos que se relacionan con las mismas áreas del saber y lo califica como apto para seleccionar entre las ofertas editoriales aquellas que a su criterio realizan las más adecuadas sustituciones didácticas del saber.

Una de las componentes más importantes relativas al conocimiento pedagógico de los profesores se refiere a la presentación que los mismos hacen de su asignatura a través de las explicaciones que brindan, las preguntas que formulan y las respuestas que aceptan como válidas, así como de los materiales que utilizan como recursos o de los libros que recomiendan para su estudio.

En relación con cualquier concepto geométrico que se quiere desarrollar, nos encontramos con la necesidad de que el profesor tenga claro:

- Los elementos que caracterizan a ese concepto.
- Sus diferentes representaciones.

- Las diversas alternativas para enfrentarlo.
- El repertorio básico de conceptos relacionados que exige abordarlo.
- Los distintos tipos de conocimiento y razonamiento que lleva involucrados.
- El fundamento epistemológico del mismo (Even y Markovitz., 1997).

Al respecto se reconoce la existencia de tres tipos de estrategias o recursos docentes, donde las estructuras de los recursos y materiales didácticos que se usan enriquecen o anquilosan los desarrollos intrínsecos de cada una de ellas:

-Las **agendas**, que incluyen los logros esperados y las actividades que pueden desarrollarse y a la vez ir adecuando a medida que se va reflexionando sobre la acción.

-Los **guiones**, que se diferencian de las agendas en cuanto a que son dinámicamente más rígidos, aunque comparten con aquellas su estructura.

-Las **rutinas** o ejercicios de práctica de los cuales se conoce anticipadamente su efecto y que no requieren por parte de los alumnos más que de un uso importante de la memoria.

2. **Conocimiento curricular** o dominio de los programas y de los recursos disponibles para la enseñanza tanto sean materiales de corte manipulativo como tecnológicos, así como bibliografía destinada a los alumnos y a la actualización y perfeccionamiento del profesor como gestor de la dinámica de la enseñanza, tendente a favorecer los aprendizajes.

Saber el contenido en cuestión es una condición necesaria para el conocimiento profesional, pero como se desprende del segundo de los apartados considerados, no es suficiente.

II.-Modelos que sustentan la práctica docente

La idea de modelo docente para representar un conjunto de prácticas de aula tipificadas sobre la base de ciertas características, es un concepto inevitablemente ambiguo por el carácter de las entidades que lo conforman, tal como sucede con el de modelo epistemológico sobre el que se lo puede sustentar. Entre estos modelos podemos encontrar: teoricismo, tecnicismo, modernismo, procedimentalismo, constructivismo psicológico y constructivismo matemático (Gascón, 2001), que caracterizamos en los siguientes cuadros (fig. 2a, 2b, 2c):

Modelo teórico de referencia	Visión epistemológica de la geometría	Visión epistemológica de la didáctica de la geometría
Euclidianismo	Todo el conocimiento puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones verdaderas (axiomas) que constan de términos conocidos (términos primitivos). Reglas lógicas de deducción permiten llegar de los axiomas a los teoremas. El **logicismo** de Russell, el **formalismo** de Hilbert y el **intuicionismo** de Brower se encuadran en esta postura.	Se manifiesta a través del **teoricismo** y el **tecnicismo** los cuáles asumen que el profesor es quien controla el proceso de enseñanza y el de aprendizaje. El **teoricismo** se identifica con la enseñanza y el aprendizaje de teorías, con los resultados de la actividad matemática a los que se llega por medio de la explicación del docente, ignorando la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos. El **tecnicismo** se basa en el uso eficiente de las técnicas algorítmicas. Usan los principios de las escuelas didácticas de raíz conductista. (Villella, 1996, 1998, 2001a).

Fig. 2a: Modelos que sustentan la práctica docente: euclidianismo, teoricismo, tecnicismo

Modelo teórico de referencia	Visión epistemológica de la geometría	Visión epistemológica de la didáctica de la geometría
Cuasi-empirismo	Se parte de la idea de que lo que justifica una teoría matemática no es la verdad de los axiomas sino que éstos permitan deducir algunos resultados. Es así que una teoría resulta **bien corroborada** sin dejar de ser conjetural: en ella los enunciados básicos verdaderos son explicados por el resto del sistema en un todo coherente sin contradicción. Se pone el énfasis en el proceso de descubrimiento por lo cual	Considera la actividad geométrica como exploratoria y se basa en el modelo docente del **modernismo** y **procedimentalismo**. El **modernismo** propone explorar problemas no triviales considerando como tales aquellos de los que no se tiene demasiado conocimiento de su respuesta. Implica el tanteo de técnicas, la aplicación de resultados conocidos, la búsqueda de problemas análogos, la formulación de conjeturas,

	se acepta la existencia de falseadores heurísticos de una teoría, lo cual permite hablar de conjeturas, pruebas y refutaciones de la teoría matemática informal (antes de ser formalizada) (Lakatos, 1976, 1981).	de contraejemplos. Traslada la importancia de la gestión de la clase de geometría al problema de su aprendizaje considerado un descubrimiento de tipo inductivo y de cualidades autónomas. Se basa en una interpretación poco profunda de la psicología genética, impregnando las prácticas del aula de cierto activismo. El **procedimentalismo** centra su atención en el dominio de técnicas heurísticas permitiendo el diseño, uso y dominio de estrategias de resolución de problemas de cierto grado de complejidad.

Fig. 2b: Modelos que sustentan la práctica docente: Cuasi-empirismo, modernismo, procedimentalismo

Modelo teórico de referencia	**Visión epistemológica de la geometría**	**Visión epistemológica de la didáctica de la geometría**
Constructivismo	Se basa en la idea de desarrollo psicogenético con anclaje en la *abstracción reflexiva* (conceptualización de las entidades matemáticas que se construyen en forma progresiva) y la *generalización completiva* (cuando una estructura se ve enriquecida por nuevos componentes o sistemas que se agregan sin modificar los precedentes pero enriqueciendo la estructura como un todo organizado). De aquí que los objetos matemáticos sean extraídos de las acciones del sujeto que aparecen coordinadas y que se desarrollan siguiendo un proceso de crecimiento basado en lo *intraobjetal* (estudio de los	Los modelos docentes constructivistas pueden ser los de raíz **psicológica** (que no hacen alusión explícita a los contenidos geométricos) y los de **raíz matemática o modelizacionismo**, que sí lo hacen. Proponen la incorporación paulatina del alumno en la resolución de una situación problemática elegida en función del conocimiento que se quiere que éste construya y que debe permitirle discernir si la solución por él diseñada, es la correcta o no. Cuando la situación problema aparece contextualizada se puede recurrir al uso de referentes pertenecientes a un sistema matemático o extramatemático

	objetos), lo *interobjetal* (estudio de relaciones y transformaciones de los objetos) y lo *transobjetal* (indagación de las estructuras construidas) (Piaget y García, 1982).	llamado **modelo**, que los modelizacionistas utilizan para llegar a la respuesta de la situación planteada u objeto matemático que se quiere que el alumno aprenda.

Fig. 2c: Modelos que sustentan la práctica docente: constructivismo, constructivismo psicológico-modelizacionismo

Los modelos didácticos descriptos evolucionan a partir de la génesis de los problemas que se plantean y de las formas de solución que eligen para resolverlos. De esta manera queda establecida una relación entre la epistemología de la matemática y la de la didáctica de la geometría (Gascón, 2001), que puede representarse como sigue (fig. 3):

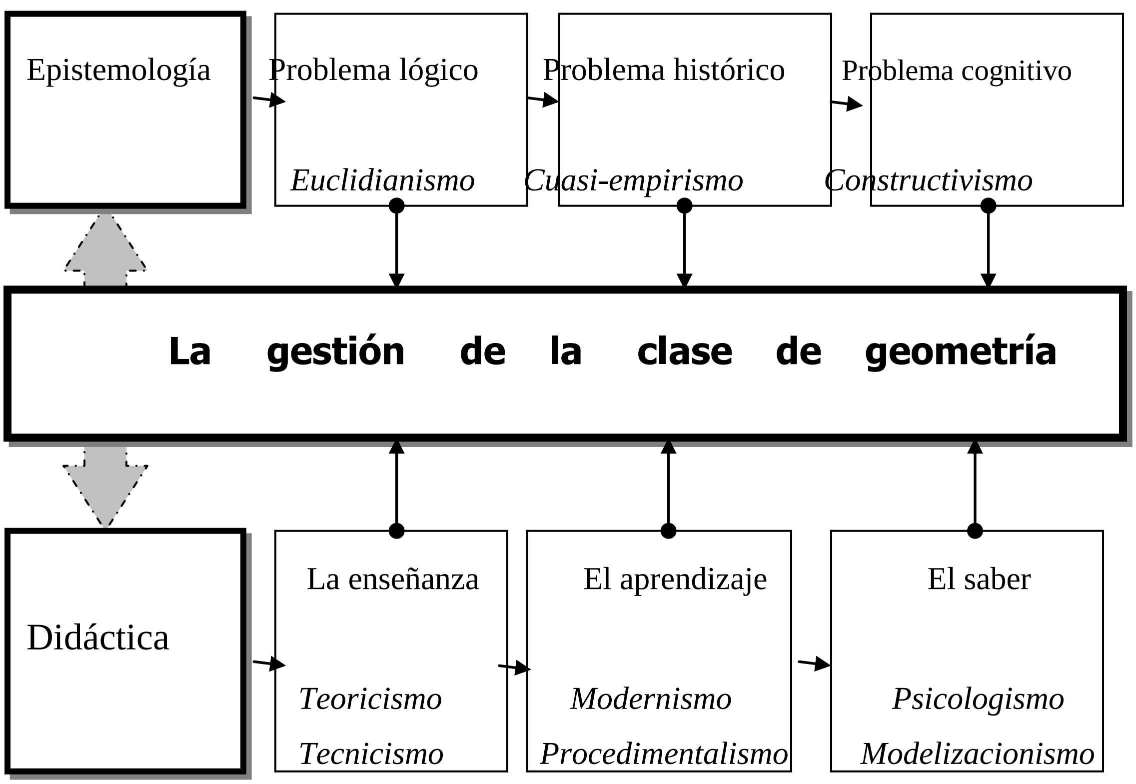


Fig.3: Evolución del modelo didáctico de la geometría en relación con el epistemológico de la matemática

III.- La dinámica de la clase de geometría

Sobre la base de las ideas desarrolladas que describen la estructura de la gestión de la clase de geometría, puede concluirse que su dinámica se representa mediante la implementación de **situaciones de enseñanza** (Dotti y Vargas, 1993) que tomen **el problema o la situación problema** como su estructura formal y las actividades que su resolución demanda como su dinámica de ejecución. Diseñando las situaciones de enseñanza, el profesor crea en su clase un ambiente caracterizado por la búsqueda de buenos problemas, de preguntas adecuadas que lleven a los alumnos a la elaboración de estrategias eficaces de solución y de respuestas creativas y precisas, en lo que llamamos un ambiente caracterizado por una cierta negociación didáctica (Porlán, 1993; Villella, 2001a) (fig. 4):

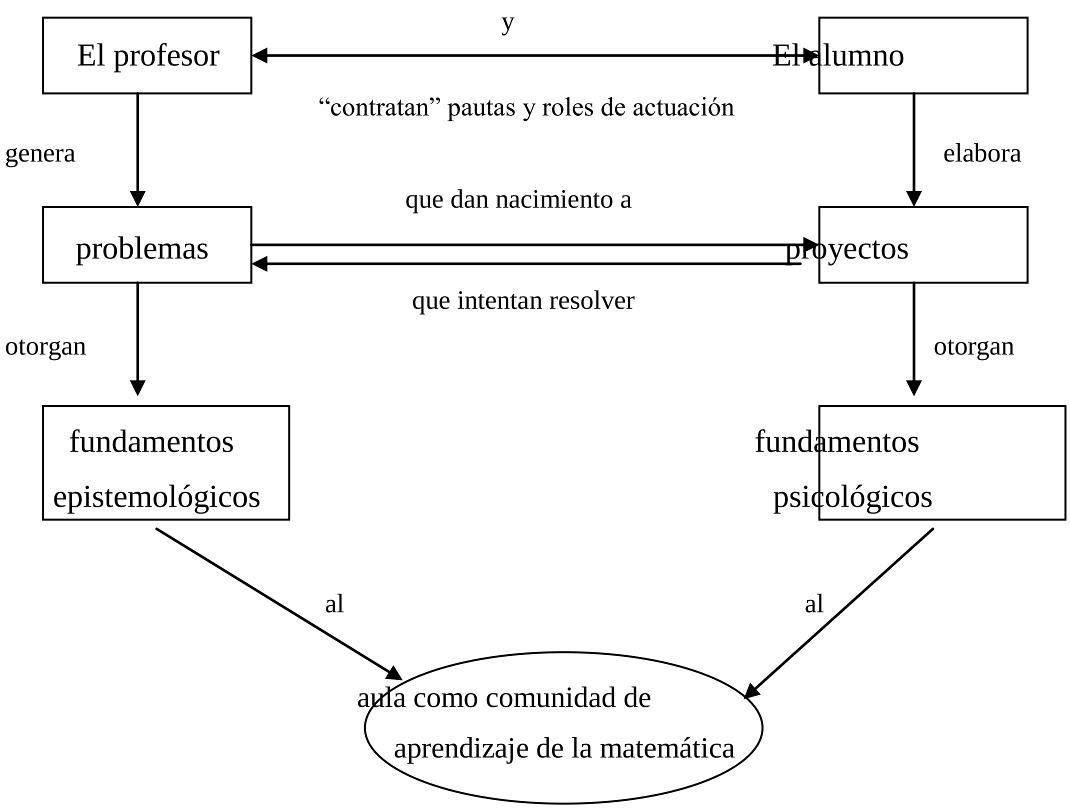


Fig. 4: Dinámica de la clase de geometría

La situación de enseñanza se constituye en una simulación que, basada en la estructura del juego, acerca a los alumnos a los saberes que deben aprender. Si la situación se basa en problemas y resolver un problema es

"encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata utilizando los medios adecuados." (Polya, 1945, 19), puede haber distintos usos de los problemas que generan variados tipos de situaciones. En los siguientes esquemas (figs. 5a, 5b, 5c) caracterizamos situaciones de enseñanza según el uso de los problemas y el tipo de aprendizaje que suponen (Villella, 2001a).

Situación de enseñanza con base en el euclidianismo

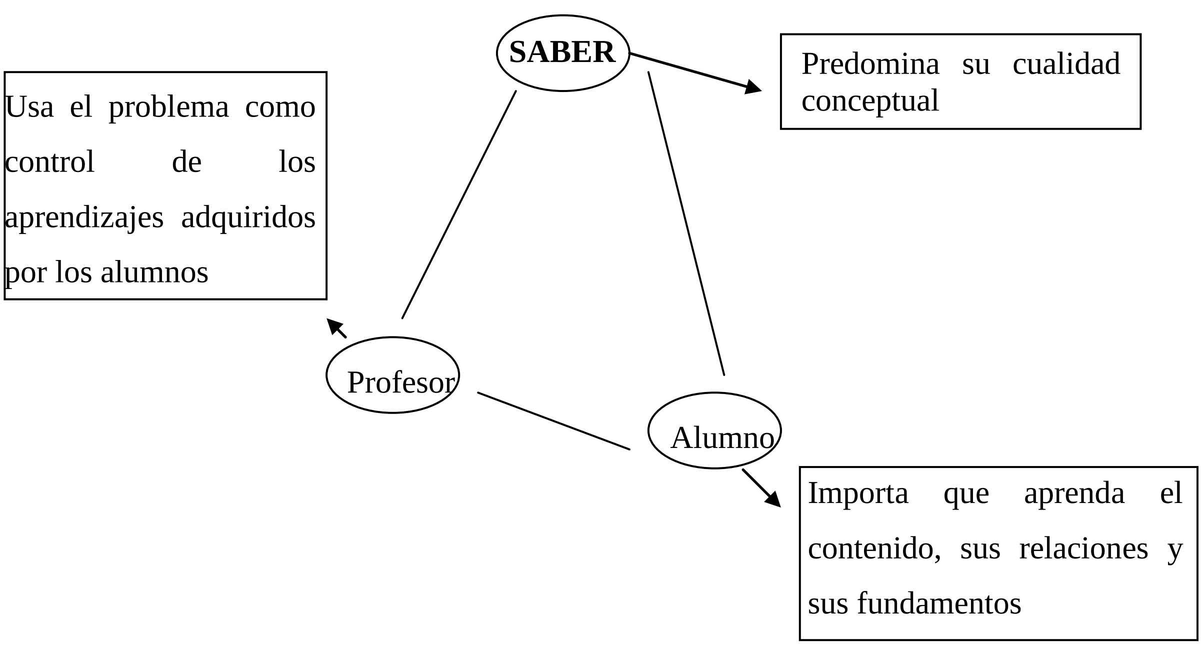


Fig. 5a: Situación de enseñanza acorde con el teoricismo y el tecnicismo

Situación de enseñanza con base en el cuasi-empirismo

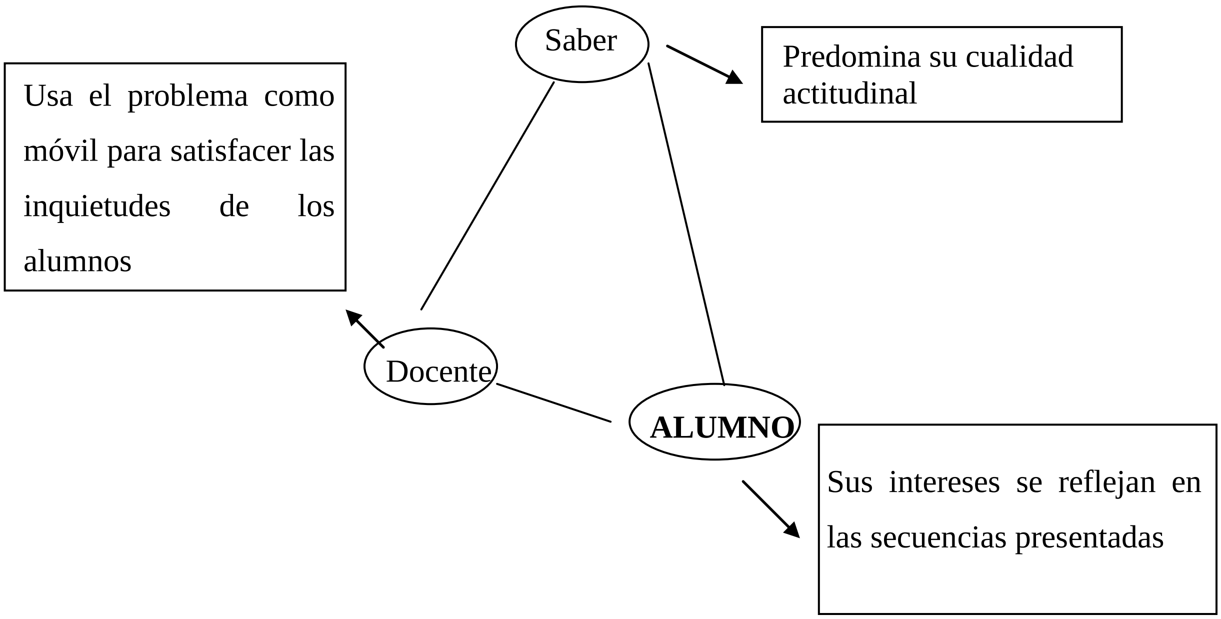


Fig. 5b: Situación de enseñanza acorde con el modernismo y el tecnologismo

Situación de enseñanza con base en el constructivismo

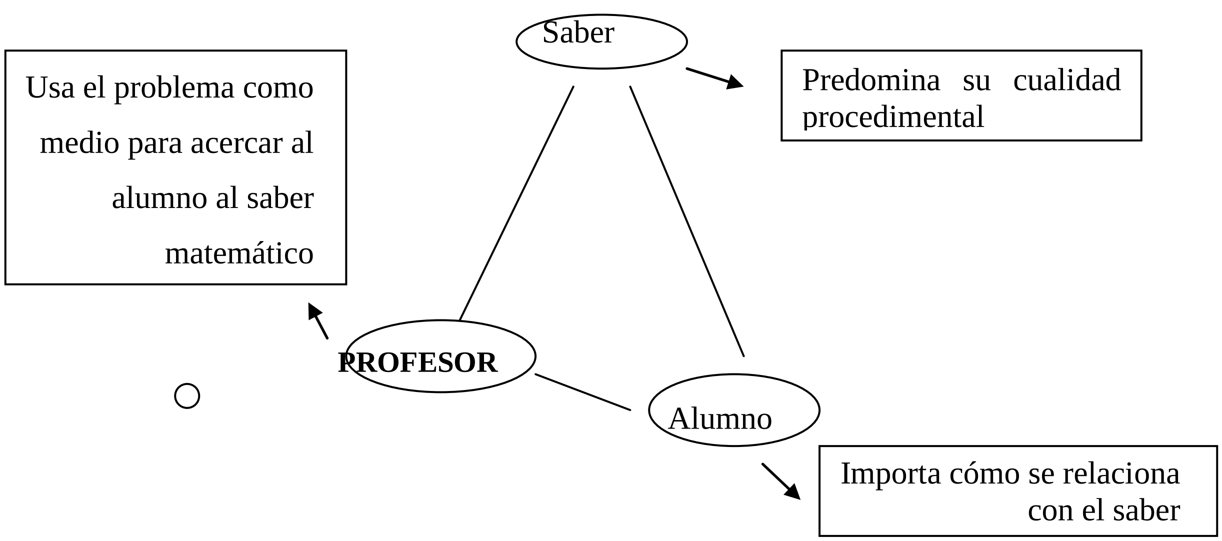


Fig. 5c: situación de enseñanza acorde con el constructivismo y el modelizacionismo

En cada una de las situaciones diseñadas, el profesor deberá explicitar al alumno cómo comunicar la respuesta que está invitado a producir. Es decir, el alumno debe conocer con claridad y precisión cómo responder con la ayuda de los conocimientos que ya posee y con los que va adquiriendo en el transcurso de la situación, cuáles son las reglas de construcción del contenido geométrico que da significatividad a la situación diseñada, cómo actuar frente a sus hallazgos y a los de los demás, qué esperar de su profesor en relación con sus aportes durante el proceso de resolución, etc. En síntesis, deberá conocer el mecanismo, las reglas del juego que debe jugar (contrato didáctico) y compartirlas con sus otros referentes al respecto: sus compañeros, los otros actores de la institución escolar, sus padres, etc.

Así, pensar en una didáctica de la geometría totalmente independiente de los hallazgos de la didáctica de la matemática parece carecer de sentido dado que en la actualidad la disyuntiva respecto de la didáctica de la matemática se genera cuando se la piensa como parte de la matemática misma o como otra rama del pensamiento desde la cuál se aportan los elementos necesarios para entender el proceso educativo que describe el aprendizaje y prescribe la enseñanza.

En cuanto a enseñar geometría, además de lo dicho, agregamos la importancia de la concepción que se tenga respecto del espacio, dado que:

"[...] la geometría necesita del espacio [...] de ese espacio donde el niño vive, respira y se mueve. Ese espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar y conquistar para vivir, respirar y moverse mejor dentro de él." (Freudenthal, 1973, 403).

El espacio aparece desde dos ópticas complementarias:

1. La que trata acerca del mundo real a través de los objetos
2. La que trata acerca de las representaciones del mundo, que hace uso de las figuras y los diagramas, asumiendo que cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales ha de mostrar alguna distorsión en ciertas propiedades objetales. A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias que proponemos a nuestros alumnos son de tipo bidimensional y esta utilización de dibujos en lugar de objetos, supone un obstáculo en el momento de la conceptualización. Cuando hablamos del espacio en geometría, lo hacemos en relación al estudio de las propiedades de figuras (de una, dos, tres o más dimensiones) abstraídas del mundo concreto de objetos

físicos. Por ejemplo, un cubo respecto de un dado, un cuadrado respecto de un tablero de ajedrez, un cono respecto de un bonete, un rectángulo respecto de una hoja de papel, etc.

Es necesario tomar en cuenta que todos los estudiantes deberían aprender contenidos relacionados con las formas y las estructuras conceptuales que ellas sostienen, además de aprender cómo analizar sus características y sus relaciones. Para lograrlo, la visualización (construyendo y manipulando imágenes mentales) y las representaciones de figuras en dos y tres dimensiones, junto con la percepción de las figuras desde distintas perspectivas, constituyen aspectos importantes acerca del pensamiento geométrico.

Los contenidos que favorecen el desarrollo de tales estructuras conceptuales pueden organizarse en mapas conceptuales de varios tipos (Torp y Sage, 1999):

- *Los curriculares*, que muestran las conexiones que tienen los contenidos en todo el curriculum de la disciplina e incluso de determinado año o nivel de estudio.
- *Los de anticipación*, que muestran las relaciones entre los contenidos que condicionan las líneas de acción cuando los mismos están involucrados en problemas a resolver.
- *Los de posibilidad*, que muestran las relaciones entre los contenidos que ejemplifican la eficacia que puede lograrse en la resolución del problema donde los contenidos en cuestión aparecen involucrados.
- *Los conceptuales propiamente dichos*, que permiten la formulación de hipótesis acerca de las estrategias que mejor resuelven el problema donde aparecen los contenidos involucrados y representan una estructura jerárquica desde el concepto general que, mediante conexiones, lleva al concepto en un plano particular y hasta a un ejemplo, si es necesario.

Los contenidos de la geometría, considerados mínimos para que los alumnos aprendan a lo largo de su escolaridad básica pueden representarse mediante el mapa conceptual de la fig. 6 que incluye la geometría sintética, la analítica de coordenadas y la de transformaciones.

A partir del mapa, pueden observarse claramente tres líneas que vertebran la enseñanza de la geometría en el aula:

1. El estudio del espacio y las relaciones de dirección, orientación y localización que caracterizan la labor lo alumnos de entre 6 y 8 años de edad,

2. El estudio de las formas y sus propiedades que les permiten ser medidas y clasificadas y que organizan la enseñanza de la geometría para alumnos de entre 9 y 11 años,

3. El estudio de las relaciones y las transformaciones que corresponden a los aprendizajes de alumnos de entre 12 y 14 años.

Esta secuenciación de contenidos permite a los alumnos transitar por lo que se denomina **las etapas de evolución respecto del concepto de espacio** que podemos representar tal como se muestra en la fig. 7, en relación **con las etapas de evolución de la actividad** que los mismos desarrollan en la clase de matemáticas:

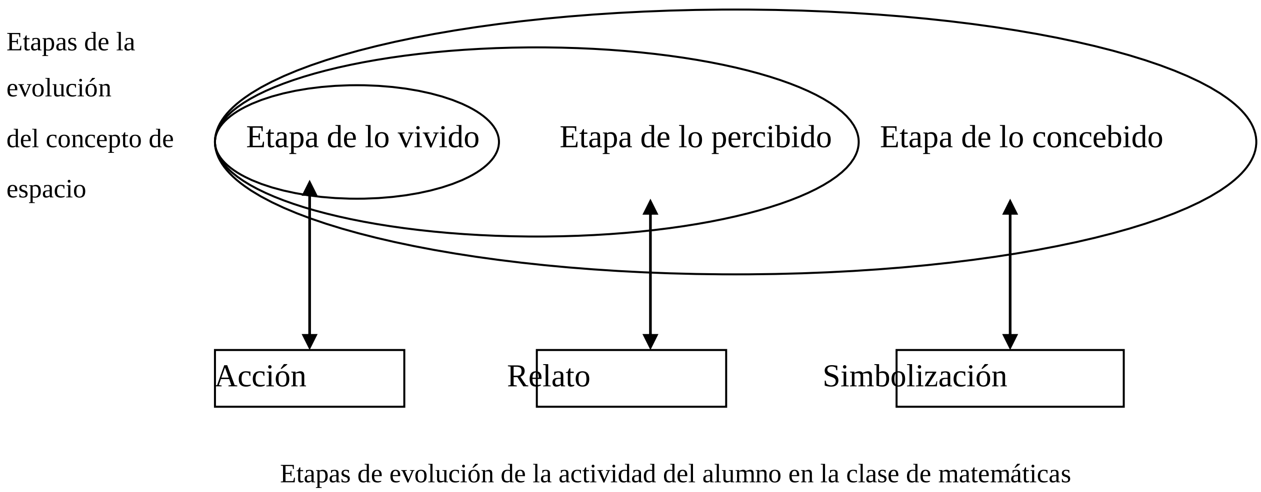


Fig. 7: Logros de los alumnos respecto del concepto de espacio en clase de geometría.

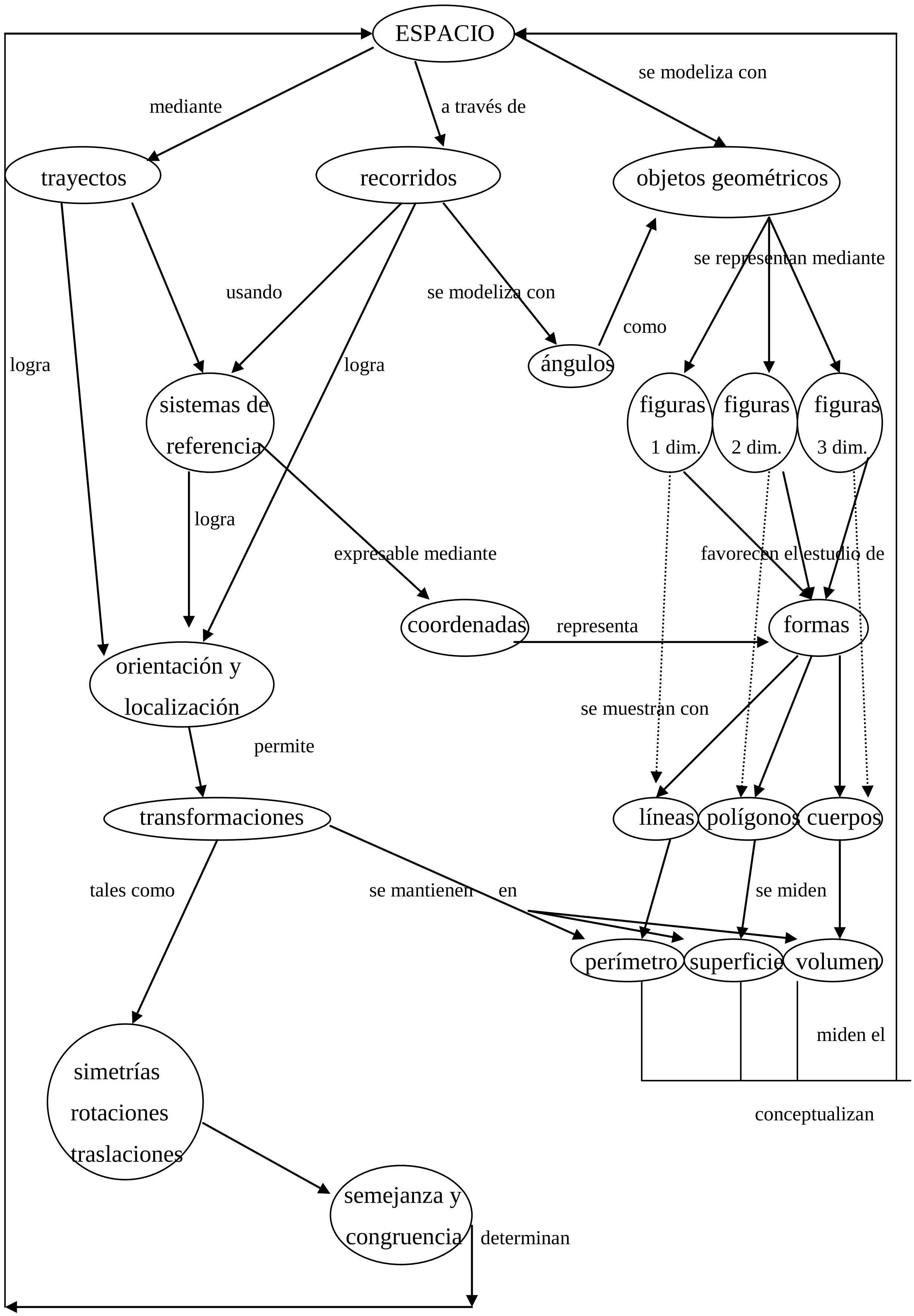


Fig. 6: Mapa conceptual acerca del concepto de espacio

IV. Los efectos de la gestión de la clase en los aprendizajes geométricos de los alumnos

La geometría que se propone enseñar en la escuela debe ser considerada como un medio para que el alumno desarrolle, entre otras, la capacidad para:

1. *Resolver problemas*: cuando se configuran en el contexto de una situación familiar para los que aprenden, se genera un entusiasmo por buscar posibles soluciones y aplicar lo que se estudió. Al permitir a los alumnos que se formulen problemas o que elaboren proyectos sobre la base de los que los docentes pueden formularles a partir de situaciones cotidianas se les ofrece la oportunidad de aplicar todo el bagaje de contenidos geométricos que estudian a diario. También provocan entusiasmo los problemas que se relacionan con la evolución histórica de la matemática o con aspectos que tienen que ver con las necesidades de relación entre los conceptos que aprenden.

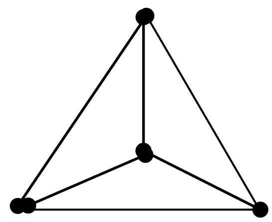
2. *Usar la geometría como un lenguaje para comunicar* sus ideas y sus hallazgos. Si bien este lenguaje es conciso, de alta densidad conceptual y, para algunos puede aparecer incomprensible, las ideas enlazadas mediante la sintaxis y la semiótica del lenguaje geométrico son claras y precisas y corresponden a las cuatro competencias lingüísticas básicas: hablar, escuchar, leer y escribir.

3. *Considerar la geometría como una herramienta para el desarrollo del razonamiento*. La capacidad de razonamiento lógico, espacial así como proporcional y gráfico se desarrolla a través del tiempo mediante actividades que crecen en orden de complejidad desde la exploración, la experimentación, incluyendo la descripción, la argumentación informal basada en resultados empíricos hasta llegar a una demostración formal que sostenga una conjetura.

4. *Considerar la geometría como recurso* para hallar conexiones entre las ramas de la matemática y entre ésta y otras áreas del conocimiento.

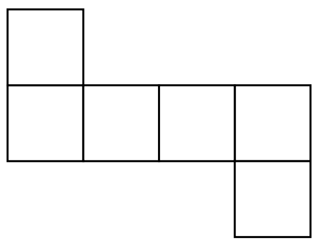
Para desarrollar tales capacidades es necesario establecer estímulos provenientes tanto del estudio de objetos o figuras de dos dimensiones como del estudio de las propiedades de los que tienen tres dimensiones.

Los sólidos -forma genérica de nombrar los objetos de tres dimensiones- deben presentarse junto con las figuras que forman sus caras. Por ejemplo, al estudiar el tetraedro:

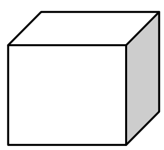


deberían estudiarse las propiedades de los triángulos que generan sus caras, admitiendo que la navegación por los mapas conceptuales que caracterizan a las dos y las tres dimensiones se realiza en forma simultánea y hasta subsidiaria.

Presentar el desarrollo plano de un cubo, como lo constituye esta plantilla

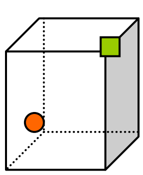


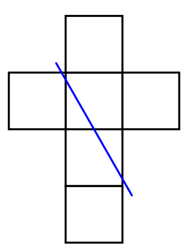
junto con el dibujo del cubo



permitirá pensar la respuesta a situaciones que se dan, por ejemplo, cuando el cubo se asume como el modelo de una caja de cristal en una de cuyas esquinas hay una araña que quiere llegar a la esquina opuesta donde reposa una mosca y se pretende averiguar la longitud del camino más corto que la araña debe recorrer.

Lo anterior supone aplicar la relación que hay entre el cuadrado de la medida de la hipotenusa y la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos en un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras) en un gráfico como el que sigue:





donde se muestra que el camino más corto es la línea recta, pero dado que la araña no vuela, se debe recurrir al desarrollo plano para hallar la solución.

El objetivo que se busca al presentar los cuerpos junto con las figuras que conforman sus caras (la tri y bi dimensión en forma simultánea) es ayudar a que la familiaridad que se tiene con los objetos tridimensionados mejore las destrezas que los alumnos puedan desarrollar respecto de la visualización y la formación de imágenes mentales de las figuras que conforman el mundo de la geometría escolar.(Villella, 2001 b)

De ese modo, se llega a una sólida construcción del concepto de espacio que incluye cuatro elementos constituyentes básicos, que se muestran en el esquema de la fig. 8 y que permiten concluir que la gestión de la clase, entonces, tuviese éxito.

ORIENTACIÓN EN EL ESPACIO

Se muestra mediante la:

lateralidad (noción de izquierda y derecha)

profundidad: (noción de arriba, abajo, encima, debajo, techo, fondo)

anterioridad: (noción de frente, atrás, derecho, revés, antes, después)

ayuda a situar

OBJETOS EN EL ESPACIO

Se muestra mediante la:

interioridad: (noción de en, dentro)

exterioridad: (noción de fuera de, afuera)

sección: (noción de corte, a través de)

unión: (noción de centro, medio)

que permiten determinar

POSICIÓN RELATIVA DE LOS OBJETOS EN EL ESPACIO

Se muestra mediante la:

interioridad: (nociones de en. dentro)

alejamiento: (nociones de fuera, entre)

intervalos: (nociones de apartado, continuo, discontinuo)

contigüidad: (nociones de contra, en contacto con)

determinan

DISTANCIA

Se muestra mediante la:

pproximidad:(noción de cerca de, al lado de, aquí)

alejamiento: (noción de lejos, allí, aquí)

Fig. 8: Elementos que conforman el concepto de espacio

V. Referencias

AICHELE, D. y COXFORD, A. (1994). *Professional Development for Teachers of Mathematics.* Reston (Virginia): NCTM.

ANDERSON, C. (1989). Citado en D. GROUWS. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Mac Millan, 220.

ANGULO RASCO, J., PEREZ GOMEZ, A; BARQUIN RUIZ, J (eds) (1999). *Desarrollo profesional docente: política, investigación y práctica.* Madrid: Akal.

AZCÁRATE, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

AZCÁRATE, P. (1996). *Proyecto Docente para optar a una plaza de Catedrático de Escuela Universitaria de Didáctica de la Matemática convocada por la Universidad de Cádiz.* Cádiz: Mimeo.

BROWN, C. y BORKO, H. (1992). *Becoming a Mathematics Teacher.* En D. GROUWS. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Mac Millan, 209-239.

BROWN, S.; COONEY, T. y JONES, D. (1990). Mathematics Teacher Education**.** En HOUSTON, R (ed)1990). *Handbook of Research on teacher Education.* New York. Mac Millan, Monograph 4, NCTM

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M; GASCON, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona:Horsori.

DOTTI, I. y VARGAS, J. (eds.) (1993). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la matemática. Guy Brousseau.* Serie B. Trabajos de matemática. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

ESTEBARANZ GARCIA, A. (1999). *Didáctica e innovación curricular*. Sevilla: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

EVEN, R. y MARKOVITZ, Z. (1997). A Close Look at the Use of Mathematics Classroom. Situation Cases in Teacher Education. *Proceedings of the 21st. PME Conference, (2),* Lati (Finland), 49-56.

FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

GASCON, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2),129-159.

KORTHAGEN, F. y KESSELS, J. (1999*). Linking Theory and Practice: Changing the Pedagogy of Teacher Education***.** *Educational Researcher*, 28(4), 29-48.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Londres: Cambridge University Press.

LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza.

LAKATOS, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza.

MARTIN DEL POZO, R. (1999). *Las materias escolares* en Cuadernos de Pedagogía 276, 50-56

MARTÍN MOLERO, F. (1999). *La didáctica ante el tercer milenio.* Madrid. Síntesis.

MARTÍN, R. (1994). *El conocimiento del cambio químico en la formación inicial del profesorado. Estudio de las concepciones disciplinares y didácticas de los estudiantes de Magisterio.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston (Virginia): NCTM.
PÉREZ GÓMEZ, A. (1992). La función del profesor/a en la enseñanza para la comprensión. Diferentes perspectivas**.** En J. GIMENO y A. PÉREZ GÓMEZ (1992). *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid. Morata.
PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.
POLYA, J. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.
PORLÁN, R. (1993).*Constructivismo y escuela.* Sevilla. Díada.
SHULMAN, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
TORP, L. y SAGE, S. (1999). *El aprendizaje basado en problemas.* Buenos Aires: Amorrortu.
VILLELLA, J. (1996). *Sugerencias para la clase de matemática***.** Buenos Aires: Aique.
VILLELLA, J. (1998). *Piedra libre para la matemática.* Buenos Aires: Aique.
VILLELLA, J. (2001a). *Uno, dos, tres ... geometría otra vez.* Buenos Aires: Aique.
VILLELLA, J. (2001b). La enseñanza de la geometría. *Revista Pedagógica Páginas para el Docente*, 2(21). http://www.aique.com.ar. (Visitada 23/03/02).