

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: PENSANDO AMBIENTES DE APRENDIZAGEM QUE PROMOVAM A COOPERAÇÃO INVESTIGATIVA

MATHEMATICAL INVESTIGATION IN THE CLASSROOM: INVESTIGATING LEARNING ENVIRONMENTS WHICH PROMOTE INVESTIGATIVE COOPERATION

INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA: PENSANDO EN AMBIENTES DE APRENDIZAJE QUE PROMUEVAN LA COOPERACIÓN INVESTIGATIVA

Cecilia Romitti Bondan¹
Lucí dos Santos Bernardi²

RESUMO

O presente artigo traz um estudo teórico concernente a conceitos e princípios sobre a Investigação Matemática em sala de aula. Defende-se que é possível propor uma aula ancorada na Investigação Matemática, desafiando as práticas educativas tecnicistas. Nesse viés, o objetivo é discutir, aqui, a investigação matemática, tendo como possibilidade a cooperação matemática, mobilizando os processos de ensino e aprendizagem da matemática. Face a isso, a metodologia empregada foi a bibliográfica e o artigo está assim estruturado: conceito educativo de Investigação Matemática; etapas investigativas como instrumento metodológico; elementos de um ambiente de aprendizagem na perspectiva de Cenários para Investigação e pressupostos de uma Cooperação Investigativa. Dessa forma, como resultados, aponta-se que a aprendizagem dos estudantes é estimulada pela curiosidade e pelo interesse. Versa-se sobre a possibilidade de desenvolver ambientes de aprendizagem que se configurem com centralidade na investigação, visando o engajamento dos discentes e a promoção de reflexões sobre a matemática e suas aplicações, oportunizando uma cooperação investigativa efetiva. Nesse sentido, espera-se que o aluno seja capaz de fazer uma investigação de natureza matemática, de acordo com cada nível de ensino, compreendendo o

¹ Possui graduação em Pedagogia pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (1995), e Matemática/Física pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (2003). Possui Pós-graduação em Psicopedagogia pela URI Pós-Graduação em Neuropsicopedagogia pela Universidade UNIASSELVI, Pós-graduação em Metodologia do Ensino de Matemática pela UNIASSELVI, Pós-Graduação em Atendimento Educacional Especializado, na Fainter(Faculdade de Iteração). Atualmente cursando Mestrado em Educação pela Universidade Regional e Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Frederico Westphalen, com a temática A Investigação Matemática em sala de aula no Ensino Fundamental- -Uma construção Necessária com Profa. Dra. Lucí dos Santos Bernardi, pertencente a Linha de Pesquisa Formação de Professores e Práticas Educativas , Trabalhou no Ensino Fundamental com Séries Iniciais e Matemática Séries finais, Física e Matemática em Ensino Médio. Atualmente é Diretora da Escola Estadual de Ensino Fundamental Afonso Pena. E-mail: ceciliaromitti@hotmail.com

² Possui Doutorado em Educação Científica e Tecnológica (2011) e Mestrado em Educação (2000) pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Graduação em Matemática (1984) pela Universidade de Passo Fundo - UPF. Atualmente é professora permanente do Programa de Pós-Graduação stricto sensu em Educação da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI, Campus de Frederico Westphalen, integrante da Linha de Pesquisa Formação de Professores, Saberes e Práticas. É líder do Grupo de Pesquisa Processos Educativos: Formação de Professores, Saberes e Práticas - GPPE, participa da Red Internacional de Etnomatemática (REDINET) e da Rede Brasileira por Instituições Educativas Socialmente Justas e Aldeias, Campos e Cidades que Educam (REDHUMANI). Participa da Cátedra UNESCO UniTwin - A Cidade que Educa e Transforma como Delegada da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI). Participa do GT 19 (Educação Matemática) da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd) e do GT 07 (Formação de Professores que ensinam Matemática) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Formação do Professor, Educação Matemática, Etnoconhecimento e Processos Educativos, Educação Indígena e do Campo, Cidades Educadoras e Pedagogias Urbanas. E-mail: lucisantosbernardi@gmail.com

que é a matemática e qual a sua utilidade na compreensão do mundo, além de ter domínio sobre os conhecimentos adquiridos.

PALAVRAS-CHAVE: investigação matemática; cooperação matemática; cenários investigativos.

ABSTRACT

This article presents a theoretical study concerning concepts and principles on mathematical research in the classroom. It is argued that it is possible to propose a class anchored in mathematical research, challenging technical educational practices. In this view, the objective is to discuss, here, mathematical research, with the possibility of mathematical cooperation, mobilizing the teaching and learning processes of mathematics. Thus, the methodology used was bibliographic and the article is structured as follows: educational concept of mathematical research; investigative stages as a methodological instrument; elements of a learning environment in the perspective of scenarios for research and assumptions of an investigative cooperation. As results, it is pointed out is that student learning is stimulated by curiosity, by interest. It focuses on the possibility of developing learning environments that are configured with centrality in research, aiming at the engagement of students and the promotion of reflections on mathematics and its applications, providing an effective investigative cooperation. In this sense, it is expected that the student will be able to carry out an investigation of mathematical nature, according to each level of education, understanding what mathematics is and what its usefulness is in understanding the world, in addition to having mastery over the knowledge acquired.

KEYWORDS: mathematical research; mathematical cooperation; investigative scenarios.

RESUMEN

Este artículo presenta un estudio teórico sobre los conceptos y principios de la Investigación Matemática en el aula. Se argumenta que es posible proponer una clase anclada en la Investigación Matemática, desafiando las prácticas educativas tecnicistas. En este sentido, el objetivo es discutir la investigación matemática, teniendo como posibilidad la cooperación matemática, movilizand los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En vista de ello, la metodología aplica fue la bibliográfica y el artículo se estructura de la siguiente manera: concepto educativo de la Investigación Matemática; las diligencias investigativas como instrumento metodológico; elementos de un ambiente de aprendizaje desde la perspectiva de Escenarios de Investigación y supuestos de una Cooperación Investigativa. Por lo tanto, como resultado, apuntase que el aprendizaje de los estudiantes es estimulado por la curiosidad y el interés. Discute la posibilidad de desarrollar ambientes de aprendizaje que se configuren con centralidad en la investigación, con el objetivo de involucrar a los estudiantes y promover reflexiones sobre las matemáticas y sus aplicaciones, proporcionando oportunidades para una cooperación investigativa efectiva. En este sentido, se espera que el estudiante sea capaz de realizar una investigación matemática, según cada nivel de educación, entendiend qué es la matemática y cuál es su utilidad en la comprensión del mundo, además de tener dominio sobre los conocimientos adquiridos.

PALABRAS CLAVE: investigación matemática; cooperación matemática; escenarios de investigación.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O artigo apresenta um estudo teórico acerca dos principais conceitos e princípios que ancoram a investigação matemática em sala de aula, buscando promover uma compreensão mais ampla sobre a sua natureza e a sua relevância na prática pedagógica como instrumento metodológico, desafiando as práticas educativas tecnicistas.

Nossa premissa é que a aprendizagem dos estudantes é mobilizada pelo seu interesse e curiosidade. Precisamos identificar os obstáculos e desafios no processo educativo, estabelecendo relações entre a teoria e a prática. É necessário que, na escola, aconteçam momentos de aprendizagem que favoreçam a interdisciplinaridade e ampliem horizontes, apresentem situações práticas relacionadas com os conteúdos trabalhados, oportunizem olhar a matemática com apreensão de elementos relacionados à linguagem matemática, suas

especificidades e utilização nesse contexto, o que permite visualizá-la, fazer interpretações e relações, favorecendo o pensamento crítico.

No campo da Educação Matemática, nos interessa pensar um contexto da sala de aula que

[Os alunos podem ter] um saber da matemática em construção e do trabalho criativo e independente... [eles podem] generalizar a partir da observação dos casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta (Pólya 1981 *apud* Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 19).

Defendemos a necessidade de contraposição ao modelo de aula em que o professor ocupa o maior tempo com exposição e os estudantes com resolução de exercícios, cuja premissa central é de que exista uma e somente uma resposta correta. Isso significa pensar em Ambientes de Aprendizagem com centralidade na investigação, ambientes em que o estudante se sinta engajado nos processos de ensino e de aprendizagem, promovendo reflexões sobre a matemática e suas aplicações. Consideramos, então, uma abordagem de Investigação Matemática que promova uma Cooperação Investigativa.

Então, é neste contexto que nosso estudo se coloca e traz como propósito conceituar e discutir a Investigação Matemática, analisando as possibilidades de Ambientes de Aprendizagem que a mobilize nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e promovam uma Cooperação Investigativa, através de uma análise bibliográfica.

O estudo realizado teve cunho bibliográfico, desenvolvido a partir de materiais pesquisados em livros, artigos, trabalhos de conclusão de curso. Segundo Galliano:

A pesquisa bibliográfica é a que se efetua tentando resolver um problema ou adquirir novos conhecimentos a partir de informações publicadas em livros ou documentos similares (catálogos, folhetos, artigos, etc.). Seu objetivo é desvendar, recolher e analisar as principais contribuições teóricas sobre um determinado fato, assunto ou ideia (Galliano, 1986, p. 109).

Nesse viés, Marconi e Lakatos (1992) explicam que a pesquisa bibliográfica é o levantamento de toda a bibliografia já publicada, objetivando fazer com que o pesquisador tenha acesso a todo o material sobre determinado assunto. Esse contato bibliográfico é essencial para evitar repetições de pesquisas, conseqüentemente, ao evitar repetições possibilita-se a expansão do tema.

Segundo Gil (1999), o estudo bibliográfico trata-se de uma pesquisa de natureza exploratória quando envolve levantamento bibliográfico, possuindo a finalidade básica de desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias para a formulação de abordagens posteriores. Dessa forma, este tipo de estudo visa proporcionar um maior conhecimento para o pesquisador acerca do assunto, a fim de que esse possa formular problemas mais precisos ou criar hipóteses que possam ser pesquisadas por estudos vindouros. As pesquisas exploratórias objetivam proporcionar uma visão geral de um determinado fato, do tipo aproximativo.

O texto está assim estruturado: apresenta, inicialmente, o conceito educativo de Investigação Matemática e suas etapas como instrumento metodológico, apresenta os elementos de um ambiente de aprendizagem na perspectiva de cenários para Investigação e desenvolve acerca dos pressupostos de uma Cooperação Investigativa.

O CONCEITO EDUCATIVO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

É relevante a indagação: o que é investigar? De forma simplista, é procurar conhecer o que não sabe. Logo, nosso trabalho se pauta no pesquisar, descobrir o que não se sabe, ou aprimorar, procurar informações a respeito. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13), “investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante, senão equivalente, temos em português os termos ‘pesquisar’ e ‘inquirir’”.

De acordo com o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara (2011, p. 737), inquirir significa “tentar obter informações sobre, fazer perguntas, questionar”; enquanto a definição dada a palavra pesquisar é “pesquisar de maneira aplicada, obter informações sobre (algo ou alguém)” (Bechara, 2011, p. 920).

Em Matemática, Ponte (2003) considera que investigar tem duas facetas: a primeira requer produzir uma conjectura ou uma justificção, a partir de uma dada questão; a segunda, validar uma conjectura ou generalização, o que significa produzir um argumento informal ou até mesmo uma demonstração. Wichnoski (2022, p. 10) considera que a “situação mais forte e educacionalmente mais interessante é quando o estudante tem um papel ativo em todo o processo – da formulação de questões, à elaboração de conjecturas, à realização de provas e à demonstração matemática”.

As aulas de matemática, na perspectiva investigativa, contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático crítico, uso de competências e habilidades, busca, pesquisa, organização, criatividade, senso crítico, iniciativa, persistência e,

principalmente, a capacidade de argumentar e se comunicar matematicamente de forma autônoma e autêntica, os estudantes passam a ser responsáveis pelo processo de aprendizagem.

Uma investigação matemática, normalmente, surge a partir ou de um ou mais problemas. A primeira coisa a se fazer é identificar esse problema, em um segundo momento tentar achar resoluções, investigar. O matemático inglês Ian Stewart (1995) conceitua um bom problema: ‘Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos’ [...] (Ponte; Brocardo; Oliveira 2009, p. 17).

Ao tentarmos resolver os problemas matemáticos, embora haja um modelo/exemplo que possa ser seguido, seremos surpreendidos com novas conjecturas conceituais e, por sua vez, chegamos a outras buscas, descobertas e questionamentos. Resolver problemas requer fazermos tentativas, hipóteses, muitas vezes, com vários caminhos para a resolução, não nos atermos a uma única possibilidade. Isso favorece a autoconfiança dos estudantes, também é preciso apresentar propostas a um determinado problema. Precisamos identificar as informações fornecidas, qual a pergunta a ser respondida, fazer anotações e organizar essas informações, traduzir o problema, usando termos matemáticos, isso poderá envolver as equações ou expressões algébricas que representem a situação descrita do problema. Após entender o problema, é necessário pensarmos em possíveis estratégias de solução; quando resolvido, retomarmos a questão para garantir que aquela resposta faça sentido no cenário dado. Ao enfatizarmos a escrita e a leitura durante o processo de resolução de problemas matemáticos, estaremos estabelecendo habilidades matemáticas sólidas, bem como habilidades de comunicação e interpretação.

É importante ressaltarmos que uma investigação permite que as situações sejam mais conflitantes na busca de respostas, o envolvimento do estudante é fundamental com discussão e argumentação, articulando o uso de problemas. Neste panorama, Ponte demarca que

Num problema, está complementemente especificado o que é dado e o que é pedido – as condições e o objetivo do problema. Numa investigação, pelo menos um destes aspectos não está complementemente especificado, sendo necessário fazer essa especificação de forma a tornar a situação num problema. Muitas vezes, isso pode ser feito de várias maneiras e, por isso, uma investigação pode dar origem a vários problemas matemáticos diferentes (Wichnoski, 2022, p. 12).

Desse modo, como conceito educativo, precisamos distinguir as perspectivas de trabalho por darem atenção a aspectos diferentes. “A resolução de problemas dá sobretudo

atenção as estratégias de resolução dos alunos e as investigações matemáticas à realização de conjecturas, generalizações e justificações” (Wichnoski, 2022, p. 12). Isso nos conduz pensar e distinguir a situação inicial e o processo, pois o que acontece, por vezes, é que a solução de um problema não está relacionada ao processo de investigação matemática como forma exploratória, distanciando-se de um bom contexto com interpretações, reflexões e questionamentos.

Assim, como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa; na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência, conseqüentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. Para D’Ambrosio *apud* Lamonato e Passos (2011), o que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância

A formulação de hipóteses na construção do conhecimento, tendo como foco o processo, que pode ser linear ou incerta, possibilita a produção e a assimilação do conhecimento, bem como favorece o ensino da matemática. É fundamental, na interação professor-aluno, algo que possa contribuir para este processo. Então, podemos pensar a Investigação Matemática atrelada à solução de problemas à medida em que a busca por essa solução possibilite aos estudantes a exploração matemática, através de descoberta, erros, acertos e tomadas de decisões, desperte incertezas e dúvida, tendo, assim, outra visão da matemática, algo a ser explorado, construído, pois não é estanque, não está dado a priori. Segundo Ponte (2003, p. 26), “investigar não é mais do que procurar conhecer, compreender, encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos”.

É possível trabalhar com atividades de investigação? Com já referido no parágrafo anterior, essa é uma questão que podemos nos fazer, pois envolve algo além do conteúdo em estudo, é toda uma conjectura de saberes. Ainda, podemos indagar: Será que o professor está preparado para enfrentar situações desse tipo? Os estudantes conseguem desenvolver

atividades de investigação? Como encontrar suporte para esses questionamentos? Como se dá uma aula investigativa? Por onde começar? Que Ambiente de Aprendizagem é necessário? Investigar precisa estar envolvido com certo ar de curiosidade, de amorosidade pelo que se faz, busca de respostas e acomodações aos nossos anseios. Quando nos deparamos com o fato de que o ato de investigar está diretamente ligado à construção de conhecimentos, nos damos conta que investigar se faz necessário para que o aprendizado de fato aconteça. Tais questões balizam nosso texto, como apresentamos a seguir.

Etapas Investigativas como instrumento metodológico

Defendemos que as investigações matemáticas deveriam ser oportunizadas e experimentadas por todos os estudantes. O docente passa a ter um papel mediador das atividades, cabendo ajudar o estudante a compreender e aprender a investigar.

Existem aspectos do papel do professor que se prendem diretamente com o apoio que concede aos alunos de forma a garantir que são atingidos os objetivos estabelecidos para a atividade. No decorrer de uma investigação, essa sua ação incide sobre duas áreas principais: a exploração matemática da tarefa proposta e a gestão da situação didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos na aula (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 51).

Nessa etapa de investigação, cabe ao professor agir na retaguarda, procurando entender e compreender o trabalho dos estudantes, intervindo, quando necessário, atuando como moderador e orientador, oportunizando que ele reflita a atividade que está sendo explorada, constitui-se um desafio adicional à sua prática, requer destreza, conhecimento de conteúdo e de metodologias adequadas à disciplina e/ou ao conteúdo.

O professor precisa pensar nessa aula, os estudantes farão em equipe, individualmente? Que questões propor? Que materiais utilizarão? Que conhecimentos precisam ter? Ou seja, tem de haver planejamento.

O ponto inicial do planejamento é a tarefa investigativa a ser atribuída aos estudantes. De acordo com Silva e Costa (2019, p. 162), são “entendidas como situações ou problemas abertos, por isso menos estruturados e que permitem a resolução por diferentes caminhos, na busca por uma das suas soluções”. Concordamos, ainda, com os autores, que as tarefas investigativas promovem o desenvolvimento da atividade matemática investigativa.

Investigar em matemática é descobrir que podemos fazer relações com o contexto, com compreensão e intervenção no mundo em que vivemos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) estabelecem quatro pontos fundamentais para realização de uma investigação matemática:

QUADRO 1 – Momentos na realização de uma Investigação

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática; Explorar a situação problemática; Formular questões.
Conjecturas	Organizar dados; Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	Realizar testes; Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura; Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 21).

Tentaremos exemplificar os momentos de investigação: a primeira etapa, da exploração e formulação de questões, constitui-se uma etapa decisiva para posteriores formulações de questões e conjecturas. Nessa etapa, os estudantes conhecem o assunto da aula, familiarizam-se com os dados e teorias. Além disso, decidem se desenvolvem o estudo do tema proposto em grupo, em dupla ou individualmente. Elucidamos com um exemplo de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), no exercício de raciocínio feito pelos estudantes, a partir da apresentação da tabela dos quadrados perfeitos apresentados a eles:

Telma: Vamos tentar o quê? Com as potências, para ver se dá alguma coisa?
 Rita: Com as raízes quadradas?
 José: 4 vezes 4, dá 16.
 Leandro: 4 vezes 4, dá 16.
 José: 5 vezes 5, dá 25.
 Telma: Está aqui.
 José: 6 vezes 6, dá 36.
 Leandro: Está aqui, não dá.
 André: Não dá.
 José: Está na primeira:
 Teresa: 7 vezes 7, dá 49. Também não dá.
 Rute: Vejam as potências. A segunda potência de qualquer coisa.
 Telma: Rute, era o que estávamos a fazer: 1 vezes 1 é 1; 2 vezes 2, são 4; 3 vezes 3, 9.
 Rute: 6 vezes 6, 36. Olha lá, está aqui na primeira coluna.
 Telma: Olha lá, Rute.
 André: Isso não deve dar.
 Rute: Diz?
 André: As potências não devem dar (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 31-32).

Como segundo momento – conjecturas – os estudantes, espontaneamente, procuram regularidades por meio de uma tabela apresentada, nesse caso, dos quadrados perfeitos. Fazem também algumas observações e comparações quando manipulam os números das raízes quadradas e potências. Para chegarem a conclusões mais profundas, os estudantes precisavam ter conhecimento do que é uma potência e, em seguida, a formulações de suas conjecturas, integrando conceitos e conhecimentos matemáticos que o professor desenvolve em suas aulas. Na sequência, os exercícios e atividades em sala – testes e reformulações – reforçam a aprendizagem e sanam dúvidas (se houver), por conseguinte, os estudantes estão aptos a realizarem uma avaliação do raciocínio elaborado a respeito do tema matemático trabalhado em sala (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009).

Em consonância com os autores, a Investigação Matemática possui características próprias, os resultados obtidos permitem verificar que os estudantes utilizam diferentes estratégias para solucionar questões investigativas, de acordo com a problemática em questão. As questões investigativas podem ser modificadas conforme a finalidade da aula ou da atividade desenvolvida, proporcionando maior aproveitamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, levando a um processo de formulação de conjecturas, que devem ser testadas e provadas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009).

As atividades investigativas precisam desencadear a exploração com múltiplas possibilidades para os estudantes vivenciarem o processo, é importante, também, a socialização como etapa investigativa e a valorização de todos os processos envolvidos, é preciso ter intencionalidade, professor e estudante passam a ser cúmplices deste novo aprender, de forma compartilhada.

Ao iniciar a investigação, é importante também que o aluno saiba o que lhe é pedido, em termos de produto final. Perceber que é aquilo que ele vai fazer vai ser mostrado aos colegas, confere ao seu trabalho um caráter público, o que constitui para ele, simultaneamente, um estímulo e uma valorização pessoal (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 29).

Nem sempre o envolvimento do estudante nas atividades investigativas garante o êxito na aprendizagem, é preciso que essas atividades sejam incorporadas aos poucos, é preciso ousar e ir longe. A investigação matemática é uma possibilidade para o aperfeiçoamento do conhecimento e não um fim.

A formulação e testagem de conjecturas podem surgir pela observação, pela manipulação, por semelhanças com outras conjecturas, nesta etapa, faz-se importante o

registro escrito para que os estudantes clarifiquem suas ideias, contribuindo à evolução das investigações. A justificação das conjecturas é essencial, o professor necessita fazer questionamentos. Muitas vezes, essa etapa não é levada em consideração e os estudantes já passam às conclusões, sem ter passado por uma justificação de fato, o que não leva a uma compreensão mais aprofundada do conteúdo em questão.

Ao final do trabalho de investigação, é indispensável que se faça o confronto das estratégias, justificações e conjecturas usadas. Cabe ao professor ser mediador, questionador na explanação dos resultados. Ao estudante cabe, também, fazer as intervenções, isso demonstra o interesse e a atenção à atividade desenvolvida, despertando a significância da investigação como prática para as aulas de matemática, com discussões produtivas e emancipatórias. As atividades de investigação não podem ser atividades isoladas, elas precisam estar no contexto da prática de sala de aula.

Numa aula de Investigação Matemática, é possível que os estudantes formulem questões que o professor não havia previsto, denotando aprendizado mútuo e conexões com outros conteúdos, o questionamento assume papel metodológico fundamental, as interrogativas do enunciado e/ou conteúdo apresentado, no intuito do levantamento de hipóteses e conjecturas que levem à aquisição de conhecimentos embasados em justificativas e reflexões de conteúdos com significação. Nesse caso, o ambiente de aprendizado é essencial, fazendo mediações com teoremas e exemplificando. A avaliação, como em qualquer outra prática, faz-se necessária, mesmo em uma aula investigativa, o ato de investigar em questão e os resultados destes frente ao conteúdo.

As investigações se reportam a diversos objetivos curriculares. Em primeiro lugar, pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta. Em segundo lugar, pretende-se que o aluno desenvolva a capacidade de realizar investigações. E em terceiro lugar, pretende-se promover atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 109).

Fazer uma avaliação da aula investigativa com registros escritos é imprescindível para o aprofundamento dos conteúdos. Para isso, os estudantes devem fazer os registros de maneira explicativa, podendo, inicialmente, gerar certa estranheza, pois, normalmente, estão acostumados a responder de forma sintética e direta as atividades e exercícios, como “siga o modelo”. Nesse cenário, a avaliação deve acontecer em duas etapas: individual e em grupo. O professor, informalmente, consegue observar o estudante que se destaca e aquele que tem

certa dificuldade com conceitos e conjecturas estruturais matemáticas, podendo, em um segundo momento, fazer uma recomposição de um ou mais conceitos ainda não assimilados por ele, auxiliando-o na compreensão.

O Ambiente de Aprendizagem: cenários para investigação

Afinal, qual o entendimento sobre a Matemática e sua função em sala de aula? Segundo Alrø e Skovsmose (2006, p. 21), “o propósito de ensinar Matemática é apontar erros e corrigi-los. Esse parece ser o entendimento comum sobre o que é Educação Matemática para muitos alunos”.

Tal entendimento tem âncora nas aulas tradicionais, nas quais o Protagonismo é do professor (não do estudante). Alrø e Skovsmose (2006) exemplificam como é a prática de uma aula de matemática tradicional: primeiro o professor apresenta a ideia e as técnicas, conforme o livro didático, em seguida, os estudantes executam os exercícios semelhantes e, por fim, o professor confere as respostas, caracterizando, assim, o **Paradigma do Exercício**. Este paradigma está diretamente ligado à organização das aulas, exercícios semelhantes às provas seletivas externas, que compõem o mundo do trabalho, no qual nenhum dos envolvidos faz parte da construção, tudo já vem pré-estabelecido.

A análise foi veiculada no ano de 2006, mas continua contemporânea, como já explicitamos em nosso texto. Também continua em voga que “o Paradigma do Exercício tem sido desafiado de muitas maneiras: pela resolução de problemas, proposição de problemas, abordagens temáticas, trabalho com projetos e etc.” (Alrø; Skovsmose, 2006, p. 52). Nesse âmbito, busca oportunizar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento crítico e intuitivo. Para tanto, devemos tratar a matemática como algo a ser investigado, que não como algo “pronto e acabado”.

Skovsmose (2014, p. 45-46)³ define um Cenário para Investigação como:

[...] um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem. Ao contrário da bateria de exercícios tão característica do ensino tradicional de Matemática, que se apresenta como uma estrada segura e previsível sobre o terreno, as trilhas dos cenários para investigação não são tão bem demarcadas. Há diversos modos de explorar o terreno e suas trilhas. Há momentos de prosseguir com vagar e cautela e outros de se atirar loucamente e ver o que acontece.

³ Pesquisador interessado especialmente em Educação Matemática Crítica. É Professor titular do Departamento de Educação, Aprendizagem e Filosofia, da Universidade de Aalborg, na Dinamarca. É membro do comitê editorial das séries internacionais *Mathematics Education Library* e *Critical Essays in Education*.

De acordo com Skovsmose (2000), existe uma dicotomia entre o Paradigma do Exercício e os Cenários para Investigação: o primeiro são processos mecânicos, reproduzidos sem questionamentos, já os Cenários para Investigação são passíveis a questionamentos e possíveis variações de resultados consoante a proposta de trabalho.

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo ‘O que acontece se...?’ do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus ‘Sim, o que acontece se...’. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O ‘Por que isso...?’ do professor representa um desafio e os ‘Sim, por que isso...?’ dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações. (Skovsmose, 2000, p. 6).

Nesse viés, defendemos, neste artigo, que um Cenário para Investigação é um espaço fecundo para acolher as etapas de uma Aula Investigativa, considerando seus diferentes ambientes de aprendizagem: **referência à matemática pura**, quando se trata apenas das técnicas envolvidas, diz respeito a grandezas, formas, operações tratadas de maneira abstrata; **referência à semirrealidade**, quando as atividades se apresentam por meio de uma situação em um conceito hipotético, é idealizado apenas para ilustrar a situação colocada, porém não contribui ou influencia na sua resolução, é um modelo de realidade fictícia, uma realidade construída por meio de conceitos e ferramentas matemáticas que não existem na realidade objetiva; e a **referência à realidade**, na qual se tem dados reais, exploram-se as experiências da realidade dos educandos.

Desse modo, observando o quadro abaixo, podemos dizer que teremos seis ambientes sugeridos pelo autor.

QUADRO 2 – Ambientes de Aprendizagens

	Paradigma de exercícios	Cenários para Investigação
Referência à matemática pura	(1)	(2)
Referência à semirrealidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000).

O ambiente de aprendizagem tipo (1) diz respeito ao contexto da matemática pura, com exercícios do tipo: a) Reduza a expressão...; b) Resolva a equação...; c) Calcule..., exemplos estes recheados em livros didáticos. Os exercícios propostos pressupõem uma única solução possível e que elas são encontradas por meio de cálculos matemáticos. Não tratam de

situações inventadas, nem decorrentes do mundo real, mas de exercícios no contexto da “matemática pela matemática”.

O ambiente de aprendizagem tipo (2) num cenário para investigação alude que os estudantes são instigados a questionar as relações existentes entre os conceitos abordados nas atividades, por exemplo com números e figuras geométricas: o que acontece se girarmos a figura? Se trocarmos o número de ordem? Se trasladarmos a figura? O contexto da matemática pura permite trabalhar a criticidade diante do que é posto em aula, para que os estudantes realizem as operações encontrando significado para as variáveis trabalhadas.

O ambiente de aprendizagem tipo (3) se apresenta no paradigma do exercício baseado em situações imaginárias, uma realidade construída, apresenta situações artificiais, encontra-se numa semirrealidade, funciona como um mundo platônico em que todas as informações são precisas e suficientes, o professor recorre a situações que ocorrem no cotidiano, no entanto, sem apoiar-se em dados reais, para explorar conceitos matemáticos, para refletir acerca do contexto em que as situações são apresentadas.

O ambiente de aprendizagem tipo (4) também está disposto em uma semirrealidade, contudo, toma forma de um cenário para investigação, constituindo-se em um convite aos estudantes para explorar e explicar. Este ambiente é caracterizado por criar situações a serem investigadas, permite que novas questões sejam levantadas e diferentes estratégias de resolução são consideradas relevantes.

O ambiente de aprendizagem tipo (5) utiliza situações reais, mas a solução não decorre de uma investigação, e sim da manipulação de regras matemáticas, com o objetivo de conscientizar questões socioeconômicas, aplicabilidade e desenvolvimento de conceitos matemáticos, com intuito esclarecedor da questão, elemento potencializador de conhecimentos.

O ambiente de aprendizagem tipo (6) faz referências à vida real, não é um projeto de fato, é uma atividade educacional com referências a vida real. As referências são reais, tornando possível os estudantes construírem diferentes significados para as atividades e não somente conceitos. Os estudantes exploram o problema, fazem cálculos e conjecturas relacionados à vida real, descartando o paradigma do exercício. A ideia de que há uma, e somente uma alternativa certa, já não é mais aceita. Neste ambiente, o professor assume papel de orientador, prevalece a autonomia, o protagonismo e o interesse dos estudantes, além de possibilitar a realização de atividades interdisciplinares.

Um cenário investigativo é um chamado para que os estudantes circundam esse processo, porém só será explícito quando, de fato, o estudante dá seu aceite ao chamado. Mesmo o professor apresentando um cenário que para ele seja atrativo, faz-se necessária a aceitação dos estudantes para que se sintam participantes e atuantes neste processo.

Skovsmose (2014, p. 60, grifos do autor) define que “investigar e explorar são *atos* conscientes, eles não acontecem como atividades forçadas. Eles não se realizam enquanto os alunos efetivamente não *fizerem* as investigações e as explorações e, para isso, pressupõe-se que a intencionalidade dos alunos faça parte do processo investigativo”.

Para Alrø e Skovsmose (2006), um processo investigativo não pode ser uma atividade compulsória, pressupõe a participação dos envolvidos e deve ser um processo aberto, de forma que a “aprendizagem como ação” e a “aprendizagem como investigação” combinem muito bem. Logo, os estudantes precisam aceitar este convite para serem condutores e participantes ativos no processo. Nessa toada, os estudantes começam a fazer hipóteses, a organizar dados, a formular conjecturas e suas afirmações, finalizando com a justificação e avaliação de todo o trabalho em si.

É importante que professores e estudantes encontrem caminhos juntos, em diferentes ambientes de aprendizagem, podem refletir sobre o percurso percorrido para analisar e resolver alguma situação, identificar ambientes em que tiveram as experiências mais bem sucedidas, pensar nas dificuldades em mover-se de um ambiente ao outro.

No processo investigativo, não está em votação a questão do certo ou do errado, é preciso avaliar as perspectivas e analisar essas novas aprendizagens. O professor se sentirá desafiado neste novo modelo, pois precisa sair de uma zona de conforto para uma zona de risco, é preciso ser hábil (Skovsmose, 2000).

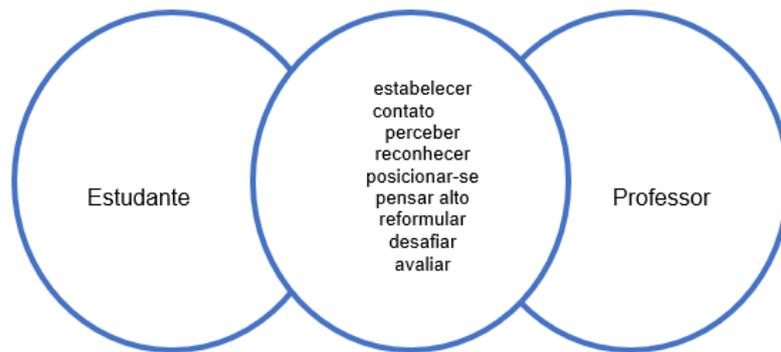
A cooperação investigativa

Na perspectiva de um cenário para investigação, em que se evidencia a necessidade de formular conhecimentos matemáticos, tecnológicos e reflexivos, desenvolvendo a cidadania nos estudantes, compensa observarmos que as aulas de matemática não podem se basear num monólogo de conteúdos por parte do professor. Precisamos considerar que a comunicação contribuiu significativamente para a construção de conhecimentos.

A comunicação é um importante elemento em sala de aula na perspectiva investigativa, que promove uma relação dialógica entre estudante e professor. Alrø e

Skovsmose (2006) propõem um modelo de cooperação investigativa (MODELO-CI) que enfatiza a relação entre a qualidade das interações professor-estudante e a aprendizagem. A ideia principal deste modelo é que a qualidade da comunicação na sala de aula afeta as características da aprendizagem da matemática e, ao fazê-lo, seleciona certos elementos que promovem a mudança de comportamento, como contato, observação, reconhecimento, posicionamento, pensamento alto, reformulação, desafio e avaliação. Nesse modelo de CI, os principais elementos são mobilizados em processos interativos a partir dos desafios matemáticos.

FIGURA 1 – Modelo de Cooperação Investigativa



Fonte: Alrø e Skovsmose (2006, p. 69)

Aqui, elucidam-se essas ações: **estabelecer contato** significa frisar uma relação com sintonia, condição primeira para investigação, o professor conseguirá **perceber** as perspectivas do estudante, fazendo uma análise de como interpreta o problema, assumindo a função de facilitador, neste processo, **reconhecer** é algo grandioso para o professor, ele precisa identificar que ação o estudante utilizará para suprir as necessidades emergentes ali dispostas. Ao **se posicionar**, expressará argumentos de defesa do seu ponto de vista, defendendo sua posição para uma ação maior de conhecimento frente a um grande grupo. Também, como ponto de grande relevância, é a ação de **reformular**, até mesmo as questões propostas pelo professor, processo que auxilia no entendimento do problema a ser estudado. O **desafiar** envolve tanto professor quanto estudante, culminando no ato de **se avaliar**, o ato de avaliar não exige o professor, ambos precisam chegar a um questionamento dos fatos e não se colocar fora destes (Alrø; Skovsmose, 2006).

Por fim, é necessário demarcar que, no espaço escolar, encontramos muitos obstáculos à cooperação investigativa, de maneira que se vivencia algo oposto ao que é possível em um cenário investigativo, que considere um Modelo de Cooperação Investigativa (CI).

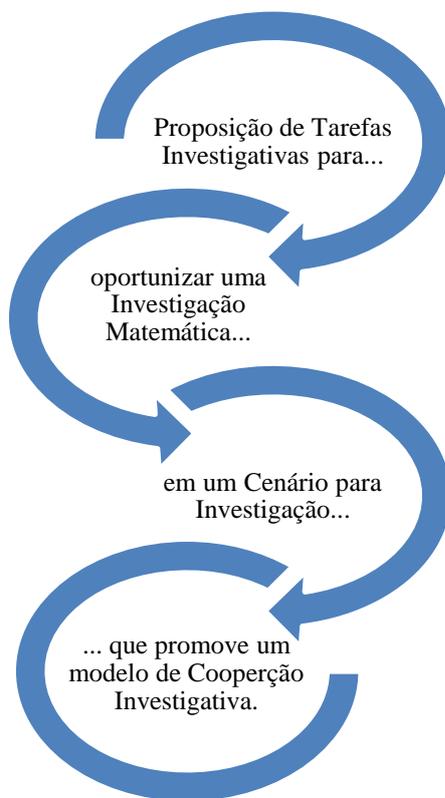
O cotidiano das escolas indica que professores e estudantes já estão acostumados a tratar questões do tipo perguntas, explicações corretas e corrigir os erros. Concordamos com Brighente e Mesquita (2016), que o caráter de interpretação não é algo vivenciado nos bancos escolares, é algo que ainda dispersa o interesse dos estudantes. Precisamos, consoante Viegas (2022), considerar o quanto nossos professores têm sobrecarga de trabalho, com excessivo número de aulas ou envolvimento com situações burocráticas, na tentativa de vencer os conteúdos e/ou avaliações externas. De outro lado, os estudantes estão acostumados a esperar pela sugestão do professor para começar, qual conteúdo seguir e como resolver, ao mesmo tempo não mostram suas opiniões, talvez até para não dar maiores explicações e argumentações do que pensam e tentam explicar. Não vivenciam a comunicação verbal, alguns tem receio de se expor e mantêm-se calados.

São questões que ilustram algumas dificuldades em construir uma matemática investigativa em sala de aula. Então, nosso empenho é também apresentar possibilidades para que os professores e os estudantes possam “vencer” o paradigma do exercício, colocando a perspectiva investigativa como um instrumento de aprendizagem com cooperação e dialogicidade, tendo o estudante como protagonista na ação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse viés, nesse artigo, seguimos uma proposta que traz como possibilidade o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem que se configuram como Cenários para Investigação, espaços profícuos para mobilizar a cooperação investigativa, através da proposição aos estudantes de tarefas investigativas para trabalhar algum conteúdo matemático. Nos referimos ao professor criar um ambiente em sala de aula “em movimento”, tal qual apresentamos na Figura 2:

FIGURA 2 – Ambiente em sala de aula “em movimento”



Fonte: Elaborada pela autora, 2023.

Para tanto, propor Investigação Matemática em sala de aula pressupõe “um provocar-se” como professor/a, o desafio é estar em um novo ambiente, permitindo a troca e a construção de conhecimento entre os envolvidos, cada vez mais dando espaço aos “e se...”. Os resultados são interpretados, os estudantes podem trabalhar em grupos cooperativos, trocar ideias, questionar as interpretações uns dos outros e avaliar suas conclusões. Nesse contexto, o aprendizado da Matemática não é pautado apenas na compreensão da matemática já feita, esperamos que o estudante seja capaz de fazer uma investigação de natureza matemática, de acordo com cada nível de ensino, pois assim poderá perceber o que é a matemática e qual a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. O ensino de matemática precisa visar o domínio dos conhecimentos adquiridos, para que este seja inundado pela paixão “detetivesca” imperativa à fruição da Matemática.

No ensino da Matemática, não há receitas prontas e próprias para cada situação, requer desafiar e buscar alternativas a cada dia, com significados reais. Acreditamos que a escola precisa envolver os estudantes no tema matemático estudado, despertando curiosidade,

interesse e comprometimento, necessitamos caminhar para uma Educação Matemática na perspectiva Crítica.

Outrossim, acreditamos que é necessário que a matemática avance de forma investigativa nas escolas, precisamos destacar as potencialidades para o ensino e aprendizagem numa contribuição positiva, devemos oferecer momentos de aprendizagens que propiciem à troca, o registro, a conjectura de resultados, a articulação de conhecimentos, propiciar boas relações com o ensino da matemática, valorizar o caráter científico da disciplina, valorar os seus benefícios, desmistificar a falta de compreensão e interpretação de desafios que ela nos apresenta.

Fica o desafio: “o que acontece se...” o/a professor/a se desafiar em propor Investigação Matemática em sua sala de aula?

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte/MG: Editora Autêntica, 2006.

BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa Evanildo Bechara**. Rio de Janeiro/RJ: Nova Fronteira, 2011.

BRIGHENTE, Miriam Furlan; MESQUIDA, Peri. Paulo Freire: da denúncia da educação bancária ao anúncio de uma pedagogia libertadora. **Pro-Posições**, Campinas/SP, v. 27, n. 1, p. 155–177, 2016. DOI 10.1590/0103-7307201607909.

GALLIANO, Alfredo Guilherme. **O método científico: teoria e prática**. São Paulo: Harbra, 1986.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação Matemática: reflexões para o ensino de Matemática. **Revista Zetetiké**, Campinas/SP, v. 19, n. 36, p. 51-74, jul./dez. 2011. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/mydownloads_01/visit.php?cid=46&lid=7036. Acesso em: 28 fev. 2022.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia do trabalho científico**. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas, 1992.

PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. In: PROFMAT, 2003, Lisboa/Portugal. **Actas [...]**. Lisboa/Portugal: APM, 2003, p. 25-39.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Helia. **Investigação Matemática na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2009.

SILVA, Denise Knorst; COSTA, David A. Abordagem investigativa em aulas de Matemática: uma investigação com casos de ensino na formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 21, n. 1, p. 160-179, 2019. DOI 10.23925/1983-3156.2019v21i1p160-179.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. **Revista Bolema**, Rio Claro/SP, v. 13, n. 14, p. 1-24, 2000. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>. Acesso em: 28 fev. 2022.

SKOVSMOSE, Ole. **Um convite à educação Matemática Crítica**. Campinas/SP: Papirus, 2014.

VIEGAS, Moacir Fernando. Trabalhando todo o tempo: sobrecarga e intensificação no trabalho de professoras da educação básica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 48, p. e244193, 2022. DOI 10.1590/s1678-4634202248244193.

WICHNOSKI, Paulo. Uma entrevista com João Pedro da Ponte sobre a investigação Matemática na educação Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão/PR, v. 11, n. 24, p. 08-14, jan./abr. 2022. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6734>. Acesso em: 05 jul. 2022.